Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

ВАРИАНТ 199

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий варианта КИМ по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1–B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11–B15 и C1–C6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1–B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B 1. В розницу один номер еженедельного журнала стоит 24 рубля, а полугодовая подписка на этот журнал стоит 460 рублей. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей можно сэкономить за полгода, если не покупать каждый номер журнала отдельно, а получать журнал по подписке?

Решение.

На покупку 25 журналов по 24 рубля каждый потребуется $25 \cdot 24 = 600$ руб. Следовательно, оформив подписку, можно сэкономить $600 - 460 = 140$ руб.

ОТВЕТ: 140

B 2 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом в возрасте четырёх месяцев и весом 5 кг в течение суток?

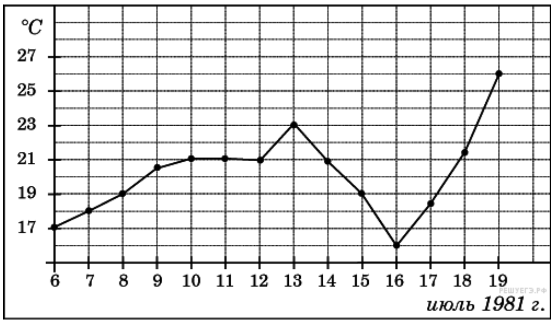
Решение.

В одной таблетке лекарства содержится 20 · 0,05 = 1 мг активного вещества. Суточная норма активного вещества для ребенка весом 5 кг составит: 1,4 · 5 = 7 мг. Тем самым, ребенку следует дать 7 таблеток.

Ответ: 7.

В 3

На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какая была температура 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что 15 июля в Бресте было 19 градусов тепла.

Ответ: 19.

В 4 В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	**Тверь**	**Липецк**	**Барнаул**
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Решение.

В Твери стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит 11 · 2 + 9 · 3 + 1,5 · 260 + 1 · 38 = 477 руб.

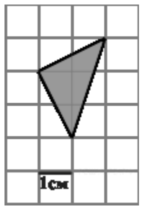
В Липецке стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит 12 · 2 + 13 · 3 + 1,5 · 280 + 1 · 44 = 527 руб.

В Барнауле стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит 14 · 2 + 16 · 3 + 1,5 · 300 + 1 · 50 = 576 руб.

Самый дешёвый набор продуктов можно купить в Твери по цене 477 руб.

ОТВЕТ:477

B 5 Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см$\times$1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

По теореме Пифагора длины сторон треугольника равны $\sqrt{5}, \sqrt{5}$; и $\sqrt{10}$. Поскольку сумма квадратов меньших сторон равна квадрату большей стороны, треугольник прямоугольный. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, поэтому, поэтому $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2,5$ см^2.

Ответ:2,5

B 6. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

Решение.

На клавиатуре телефона 10 цифр, из них 5 четных: 0, 2, 4, 6, 8. Поэтому вероятность того, что случайно будет нажата четная цифра равна 5 : 10 = 0,5.

Ответ: 0,5.

B 7 Решите уравнение $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$.

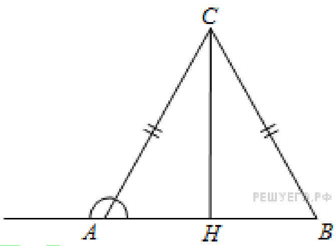
Решение.

Выполним преобразования, используя формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(2x+7)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 28x + 49 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 32x = -48 \Leftrightarrow x = -1,5.$$

Ответ: −1,5.

B 8 В треугольнике ABC $AC = BC = 7$, тангенс внешнего угла при вершине A равен $-\frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AB.



Решение.

$$AB = 2AH = 2AC\cos A = 2AC\sqrt{\frac{1}{1+tg^2A}} = 2AC\sqrt{\frac{1}{1+tg^2A_{vnesh}}} =$$

$$= 14\sqrt{\frac{1}{1+\frac{33}{16}}} = 14 \cdot \frac{4}{7} = 8$$

.Ответ: 8.

B 9. Прямая $y = 3x+1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите *a*.

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0+2=3, \\ ax_0^2+2x_0+3=3x_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0=0,5, \\ 0,5x_0-x_0=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,125; \\ x_0=4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 0,125

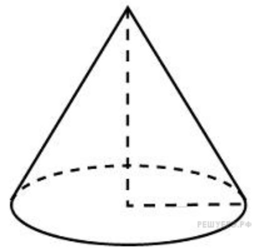
Ответ: 0,125.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2+2x+3=3x+1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1-8a$ уравнения $ax^2-x+2=0$ должен быть равен нулю, откуда

$$a=\frac{1}{8}=0,125$$

.В 10 Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в 3 раза?



Решение.

Объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота конуса. При уменьшении высоты в 3 раза объем конуса также уменьшится в 3 раза.

Ответ: 3.

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В 11 . Найдите значение выражения $2^{3\sqrt{7}-1}\cdot 8^{1-\sqrt{7}}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$2^{3\sqrt{7}-1}\cdot 8^{1-\sqrt{7}}=2^{3\sqrt{7}-1}\cdot 2^{3(1-\sqrt{7})}=2^{3\sqrt{7}-1+3-3\sqrt{7}}=2^2=4.$$

Ответ: 4.

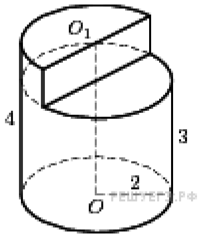
В 12 .Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0=440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v)=\dfrac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, $c=315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $f(v)-f_0\geq 10$ при известном значении постоянной $f_0=440$ Гц:

$$f(v)-f_0\geq 10 \Leftrightarrow \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}}-f_0\geq 10 \Leftrightarrow \frac{440}{1-\frac{v}{315}}-440\geq 10 \Leftrightarrow 1-\frac{v}{315}\leq\frac{44}{45} \Leftrightarrow v\geq\frac{315}{45}=7\text{ м/с}.$$

Ответ: 7.



В 13 Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.

Решение.

Объем данной фигуры равен сумме объемов цилиндра с радиусом основания 2 и высотой 3 и половины цилиндра с тем же радиусом основания и высотой 1:

$$V=\pi R^2\left(H_1+\frac{1}{2}H_2\right)=\pi 2^2(3+0,5)=14$$

Ответ: 14.

В 14. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Скорость товарного поезда меньше, чем скорого на 750 м/мин или на

$$\frac{0,75\text{км}}{\frac{1}{60}\text{ч}}=45\text{км/ч}.$$

Пусть v км/ч — скорость товарного поезда, тогда скорость скорого поезда $v+45$ км/ч. На путь в 180 км товарный поезд тратит времени на 2 часа больше, чем скорый, отсюда имеем:

$$\frac{180}{v}=\frac{180}{v+45}+2 \Leftrightarrow \frac{180}{v}=\frac{180+2v+90}{v+45} \Leftrightarrow 180v+180\cdot 45=270v+2v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v^2+90v-180\cdot 45=0 \Leftrightarrow v^2+45v-90\cdot 45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=45; \\ v=-90 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v=45.$$

Ответ: 45.

В 15 Найдите наименьшее значение функции $y=5\operatorname{tg}x-5x+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{5}{\cos^2 x}-5=5\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=5\operatorname{tg}^2 x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является $y(0)=5\operatorname{tg}0-5\cdot 0+6=6$.

Ответ: 6.

Для записи решений и ответов на задания С1-С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С 1. а) Решите уравнение $\cos x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдем корни, лежащие на заданном отрезке. Составим двойное неравенство:

$$\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + \pi k \le 2\pi,$$

откуда

$$\frac{3}{4} \le k \le 2\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $k = 1$ или $k = 2$, тогда искомые корни $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

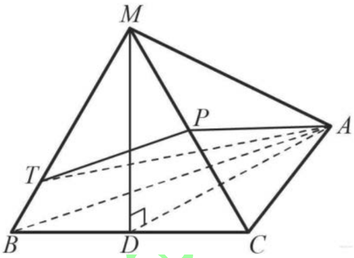
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; *б)* $\frac{3\pi}{4}$ *и* $\frac{7\pi}{4}$.

С 2. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

Решение.

Проведём высоту AD треугольника ABC. В тоже время AD — высота пирамиды $MPTA$, опущенная из вершины A на плоскость основания MPT.

$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$



Площадь треугольника MPT составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3\cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT}\cdot AD = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} = 24.$$

Ответ: 24.

Приведём другое решение:

$V_{MPTA} = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD$, где D — середина BC.

а) Поскольку AD — медиана треугольника ABC, AD — его высота. Поскольку $AD \perp BC$ и $AH \perp MH$(т. к. по условию $(ABC) \perp (MBC)$), $AD \perp (ABC)$, т. е. является высотой пирамиды $MPTA$.

б) $S_{MPT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{MBC} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$

в) $AD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

г) $V_{MPTA} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$

Ответ: 24.

С 3. Решите неравенство $\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8(2x - x^2) + 17}{x^2 - 2x - 4} \geq -2$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{(x^2-2x)^2 - 8(x^2-2x) + 16}{x^2-2x-4} + \frac{1}{x^2-2x-4} \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-2x-4)^2}{x^2-2x-4} + \frac{1}{x^2-2x-4} \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 + \frac{1}{x^2-2x-4} \geq -2.$$

Сделаем замену: $a = x^2 - 2x - 4$.

Получим: $a + \frac{1}{a} \geq -2$, откуда

$$\frac{a^2+2a+1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a+1)^2}{a} \geq 0.$$

Решая это неравенство, находим: $a = -1$ или $a > 0$.

Если $x^2 - 2x - 4 = -1$, то $x = 3$ или $x = -1$.

Если $x^2 - 2x - 4 > 0$, то $x < 1 - \sqrt{5}$ или $x > 1 + \sqrt{5}$.

Ответ: $3,\ -1,\ (-\infty;\ 1-\sqrt{5}),\ (1+\sqrt{5};\ +\infty)$.

С 4. Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный 60°. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите MN.

Решение.

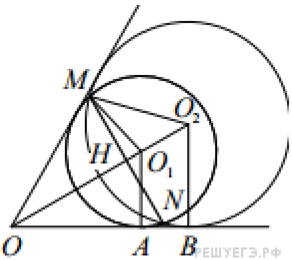


Рис. 1

Пусть O_1 — центр окружности радиуса 6, O_2 — центр второй окружности, O — вершина угла, в который вписаны окружности, A и B — точки касания соответственно первой и второй окружностей с одной из сторон угла, тогда $OO_1 = 2O_1A = 12$.

Возможны два случая. <u>Первый случай</u>: точка O_1 лежит между точками O и O_2 (рис. 1), тогда $OO_2 = OO_1 + O_1O_2 = 16$, откуда радиус второй окружности

$$O_2M = O_2B = \frac{OO_2}{2} = 8.$$

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 4$, $O_1M = 6$, $O_2M = 8$. Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 9.$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 3\sqrt{15},$$

откуда

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \frac{3\sqrt{15}}{2};\ MN = 2MH = 3\sqrt{15}.$$

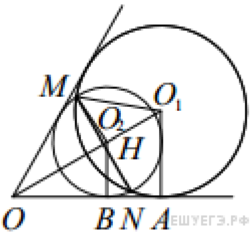


Рис. 2

<u>Второй случай:</u> точка O_2 лежит между точками O и O_1 (рис. 2), тогда $OO_2 = OO_1 - O_1O_2 = 8$, откуда радиус второй окружности

$$O_2M = O_2B = \frac{OO_2}{2} = 4.$$

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_1 = 4$, $O_1M = 6$, $O_2M = 4$. Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 7.$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 3\sqrt{7},$$

откуда

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \frac{3\sqrt{15}}{2};\ MN = 2MH = 3\sqrt{7}.$$

Ответ: $3\sqrt{7}$ *или* $3\sqrt{15}$.

С 5.Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 - 8x + |y| + 12 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = 8(x-2) \end{cases}$ имеет ровно 8 решений.

Решение.

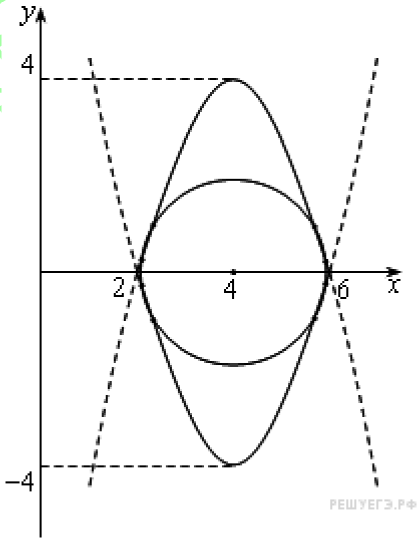
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |y| = 4 - (x-4)^2, \\ (x-4)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол:

$$y = \begin{cases} 4 - (x-4)^2, & y \geq 0; \\ (x-4)^2 - 4, & y < 0 \end{cases}$$

(см. рисунок).



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(4;\ 0)$. На рисунке видно, что система имеет восемь решений, только если радиус окружности меньше 2 и окружность дважды пересекает каждую ветвь каждой из парабол. Это условие в силу симметрии равносильно тому, что окружность пересекает правую ветвь параболы $y=4-(x-4)^2$ в двух точках с положительными ординатами.

Получаем уравнение $y=4-(a^2-y^2)$, откуда

$$y^2-y+(4-a^2)=0,$$

которое должно иметь два различных положительных корня. Следовательно, дискриминант и свободный член этого уравнения должны быть положительны:

$$\begin{cases}1+4a^2-16>0,\\ 4-a^2>0,\end{cases}\ \text{откуда}\ \begin{cases}a^2>\dfrac{15}{4};\\ a^2<4;\end{cases}\ \begin{cases}|a|>\dfrac{\sqrt{15}}{2},\\ -2<a<2.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-2;\ -\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2};\ 2\right)$

С 6 . За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было 11 или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды равно m_1. Тогда число $\frac{m_1}{m_1+11}$ не больше , чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$; откуда $\frac{m_1}{m_1+11}\le\frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1\le 5$. Пусть m_2 — число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2+11}\le\frac{2}{5}$; откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \le 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хот что-то не больше, чем 5 + 7 = 12. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 25 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой — только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ели и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{5}{16}, \frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{2}{5};$ значит $\frac{m_1}{d} \le \frac{5}{11}, \frac{m_2}{d} \le \frac{2}{3}.$

Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{37}{33};$ поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{37}{33}+1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$